ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ ДВУМЕРНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

С.И. Белов

Казанский государственный университет, Казань

ELEMENTARY EXCITATIONS IN TWO-DIMENSIONAL CLASSICAL FERROMAGNET

S.I. Belov

Kazan State University, Kazan, Russia

Magnetic Resonance in Solids
Electronic Journal

Volume **6**, *No.* **1**,
pages **17-20**, **2004**

http://mrsej.ksu.ru

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОМ ДВУМЕРНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

С.И. Белов
Казанский государственный университет, Казань

Получен спектр элементарных возбуждений над неоднородным скирмионным состоянием классического двумерного ферромагнетика.

ELEMENTARY EXCITATIONS IN TWO-DIMENSIONAL CLASSICAL FERROMAGNET

S.I. Belov
Kazan State University, Kazan, Russia

The inhomogeneous skyrmion states of two-dimensional classical ferromagnet were shown to be stable spin cofigurations. The energy spectrum of elementary excitations above the skyrmion background was obtained.

Неоднородные устойчивые конфигурации, получившие впоследствии название скирмионов или топологических возбуждений, впервые были рассмотрены в работах Скирме [1-3] в связи с задачей о механизме нуклон-нуклонного взаимодействия. В 1975 году Белавин и Поляков установили существование таких же состояний в двумерном классическом ферромагнетике, не рассматривая их вклад в магнитные и кинетические свойства системы. В данной работе определяется спектр элементарных возбуждений над скирмионным состоянием (этому эквивалентна задача об устойчивости таких состояний).

Рассмотрим квадратную решетку, в каждом узле которой расположен трехмерный классический спин, состояние которого можно задать двумя сферическими углами θ и φ.

$$\mathbf{S} = S\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = \left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right). \tag{1}$$

Гамильтониан такой системы в непрерывном пределе имеет вид

$$H = \frac{1}{2} JS^2 \int d^2x \left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta (\nabla\varphi)^2 \right]. \tag{2}$$

Здесь θ и φ предполагаются гладкими функциями координат x, y, интегрирование проводится по бесконечной плоскости.

Минимизация гамильтониана по φ и θ приводит к уравнениям, описывающим неоднородную спиновую конфигурацию:

$$\begin{aligned} &\Delta\theta = \sin\theta\cos\theta(\nabla\varphi)^2 \\ &\nabla(\sin^2\theta\nabla\varphi) = 0 \end{aligned}. \tag{3}$$

Решения системы (3), называемые топологическими возбуждениями, были получены Белавиным и Поляковым [4] в следующем виде:

$$W(z) = \tan(\theta/2)\exp(i\varphi) = \frac{P_{Q_1}(z)}{R_{Q_2}(z)}, \tag{4}$$

где $z = x + iy$, $P_{Q_1}(z), R_{Q_2}(z)$ – полиномы степени Q_1, Q_2, соответственно.

Решения (4) могут быть представлены как непрерывное отображение бесконечной плоскости на сферу единичного радиуса с топологическим зарядом Q, равным наибольшему из значений Q_1, Q_2. Простейшие конфигурации, соответствующие $Q = +1, -1$, впервые полученные Скирме [1], были названы скирмион и антискирмион.

Уравнения (3) представляют собой, вообще говоря, условие экстремальности функционала энергии (2). Для того, чтобы соответствующие состояния были устойчивыми, то есть соответствовали минимуму функционала, необходима положительная определенность второй вариации H вблизи экстремальных решений.

Спиновые конфигурации вблизи экстремальных состояний можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \theta_1 \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 \end{aligned}. \tag{5}$$

Здесь θ_0, φ_0 – решения, удовлетворяющие (4), θ_1, φ_1 – малые отклонения от этих состояний.

С точностью до квадратичных по θ_1, φ_1 членов гамильтониан (2) принимает вид:

$$H = \varepsilon_0 Q + \tfrac{1}{2} JS^2 \int d^2x [a^* \widehat{F} a], \tag{6}$$

где $\varepsilon_0 = 4\pi JS^2$, $\widehat{F} = -\nabla^2 + 2i\cos\theta_0 \nabla\varphi_0 \nabla + (\nabla\varphi_0)^2 \cos 2\theta_0$, $a = \theta_1 - i\varphi_1 \sin\theta_0$.

Как видно, условие положительной определенности второй вариации функционала энергии эквивалентно положительности спектра собственных значений оператора $\widehat{F}$, или энергии элементарных возбуждений над скирмионным состоянием. Для исследования второго слагаемого в выражении (6) удобно перейти от интегрирования по бесконечной плоскости к Q-кратному интегрированию по единичной сфере. Замечая, что

$$\begin{aligned} &d^2x = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta_0,\varphi_0)} \right| d\theta_0 d\varphi_0 = \frac{d\Omega}{(\nabla\varphi_0)^2 \sin\theta_0}, \\ &d\Omega = \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 \end{aligned} \tag{7}$$

перепишем (6) в следующей форме:

$$\begin{aligned} &H = \varepsilon_0 Q + \frac{1}{2} JS^2 \int\limits_{(Q)} d\Omega [a^* \widehat{G} a], \\ &\widehat{G} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 2i\cos\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos 2\theta\right) \end{aligned}. \tag{8}$$

Здесь и далее опускаем значок 0 в переменных θ_0, φ_0.

Спектр собственных значений $\widehat{G}$ легко получить, введя, по определению, операторы $\widehat{J}_+, \widehat{J}_-, \widehat{J}_z$:

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_+ &= \exp(i\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\right) \\
\widehat{J}_- &= \exp(-i\varphi)\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta}\right). \\
\widehat{J}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что $\widehat{J}_+, \widehat{J}_-, \widehat{J}_z$ удовлетворяют перестановочным соотношениям для компонент момента импульса, а оператор $\widehat{G}$ может быть представлен в виде

$$\widehat{G} = \frac{1}{2}\left(\widehat{J}_+\widehat{J}_- + \widehat{J}_-\widehat{J}_+\right) + \widehat{J}_z^2 - 2 = \widehat{J}^2 - 2\,. \tag{10}$$

Таким образом, задача о нахождении спектра элементарных возбуждений над скирмионным состоянием сводится к задаче о собственных функциях и собственных значениях квадрата момента импульса.

Раскладывая a по собственным функциям квадрата момента

$$\begin{aligned}
a(\Omega) &= \sum_{JM} a_{JM}\psi_{JM}(\Omega) \\
\mathbf{J}^2\psi_{JM} &= J(J+1)\psi_{JM} \quad , \\
\Omega &= (\theta,\varphi)
\end{aligned} \tag{11}$$

получим гамильтониан системы невзаимодействующих пространственных ротаторов:

$$\begin{aligned}
H &= \varepsilon_0 Q + \sum_{J=1}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J} E_J \left|a_{JM}\right|^2 \\
E_J &= \tfrac{1}{2} JS^2\left[J(J+1) - 2\right] \quad .
\end{aligned} \tag{12}$$

Отсутствие решения с $J = 0$ непосредственно следует из определения $\widehat{J}_+, \widehat{J}_-, \widehat{J}_z$ по формулам (9). Минимальное значение E_J, равное 0, соответствует $J = 1$, следовательно, скирмионные конфигурации представляют собой устойчивые состояния.

Следует отметить, что полученные результаты становятся неверными в случае квантового гейзенберговского магнетика. Действительно, решая задачу об элементарных возбуждениях вблизи неоднородных собственных состояний гейзенберговского спинового гамильтониана, мы получим гамильтониан, имеющий вид (6), в котором a^*, a должны быть заменены на операторы рождения и уничтожения бозонов a^+, a :

$$\left[a(\mathbf{r}), a^+(\mathbf{r}')\right]' = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,.$$

Дальнейший переход от интегрирования по плоскости к интегрированию по сфере дает выражение, аналогичное (12)

$$H = \varepsilon_0 Q + \sum_{J=1}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J} E_J a_{JM}^+ a_{JM} \; . \tag{14}$$

Однако операторы a_{JM}, a_{JM}^+ уже не удовлетворяют перестановочным соотношениям для бозонов, и вопрос о диагонализации гамильтониана (14) остается открытым.

Литература

1. T. Skyrme. Proc. Roy. Soc. London, Ser.A247, p.260-278, 1958.
2. T. Skyrme. Proc. Roy. Soc. London, Ser.A252, p.236-245, 1959.
3. T. Skyrme. Proc. Roy. Soc. London, Ser.A260, p.127-139, 1961.
4. А.А. Белавин, А.М. Поляков. Письма в ЖЭТФ, т.22, вып.10, с.503-506, 1975.